PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CASTILLA-LA MANCHA

JUNIO - 2009

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

La prueba consta de cuatro bloques con dos opciones cada uno. Debes contestar una única opción de cada bloque. Todas las opciones puntúan igual. Puedes usar cualquier tipo de calculadora.

PRIMER BLOQUE

1º-A) Encuentra el punto de la recta $r \equiv x + y = 4$, que cumpla que la suma de los cuadrados de sus coordenadas sea mínima.

Los puntos de la recta r tienen una expresión general de la forma $Q(x,\ 4-x)$.

La suma de los cuadrados de sus coordenadas es la siguiente:

$$S = x^2 + (4-x)^2 = x^2 + 16 - 8x + x^2 = 2x^2 - 8x + 16 = \underline{2(x^2 - 4x + 8) = S}.$$

Para que la suma sea mínima su derivada tiene que ser nula:

$$S'(x) = 2(2x-4) = 4(x-2) = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \underline{x=2}.$$

Para justificar que se trata de un mínimo se recurre a la segunda derivada; si su valor es positivo se trata de un mínimo relativo y si es negativa se trata de un máximo relativo.

$S''(x) = 4 > 0 \;\Rightarrow\;$ <u>Mínimo</u>, como queríamos justificar.

El punto P pedido se obtiene sustituyendo el valor de x = 2 en el punto genérico:

<u>P(2, 2).</u>

****

1º-B) Enuncia el Teorema de Bolzano. Como aplicación de este teorema, demuestra que las gráficas de las funciones $f(x)=e^{x^2}$ y $g(x)=2\cos\left(x^2\right)$ se cortan en, al menos, un punto.

El teorema de Bolzano se puede enunciar de la siguiente forma:

"Si una función f es continua en un intervalo cerrado [a, b] y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un valor $c \in (a,\ b)$ tal que $f(c)=0$".

Los puntos de corte de dos gráficas se obtienen de la igualación de sus expresiones: $f(x)=g(x) \;\Rightarrow\; e^{x^2}=2\cos\left(x^2\right)$ *o también*: $e^{x^2}-2\cos\left(x^2\right)=0$.

Considerando la función $h(x)=e^{x^2}-2\cos\left(x^2\right)$, continua en su dominio, que es el conjunto de los números reales, por estar formada por la suma de dos funciones continuas que tienen el dominio expresado.

A la función h(x) cumple los requisitos necesarios para aplicarle el Teorema de Bolzano a cualquier intervalo cerrado considerado.

Demostrar que las funciones $f(x)=e^{x^2}$ y $g(x)=2\cos\left(x^2\right)$ se cortan es equivalente a demostrar que la función $h(x)=e^{x^2}-2\cos\left(x^2\right)$ se anula para, por lo menos, un valor de x, o sea, que cumpla en un intervalo considerado el Teorema de Bolzano, cosa que acabamos de comprobar.

Por ejemplo: $h(0)=e^{0}-2\cos\ 0=1-\ 2\cdot 1=-1<0\ \ ;;\ \ f_{(\sqrt{\pi})}=e^{\pi}-2\cos\pi=e^{\pi}+2>0$.

Según el teorema de Bolzano, se puede afirmar que la función $h(x)=e^{x^2}-2\cos\left(x^2\right)$ tiene al menos un punto de corte con el eje OX en el intervalo $\left(0,\ \sqrt{\pi}\right)$ y, como consecuencia:

$$\underline{\underline{f(x)=e^{x^2}\ \ y\ \ g(x)=2\cos\left(x^2\right)\ \ se\ \ cortan\ \ en,\ \ por\ \ lo\ \ menos,\ \ un\ \ punto,\ \ c.q.d.}}$$

****

SEGUNDO BLOQUE

2º-A) Encuentra la primitiva de la función $f(x)=\frac{x+36}{4+9x^2}$.

$$F(x)=\int f(x)\cdot dx=\int\frac{x+36}{4+9x^2}\cdot dx=\int\frac{x}{4+9x^2}\cdot dx+\int\frac{36}{4+9x^2}\cdot dx=\underline{I_1+I_2=F(x)} \qquad (*)$$

$$I_1=\int\frac{x}{4+9x^2}\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 4+9x^2=t \\ 18x\cdot dx=dt \\ x\cdot dx=\frac{1}{18}\cdot dt \end{array}\right\} \Rightarrow I_1=\int\frac{\frac{1}{18}}{t}\cdot dt=\frac{1}{18}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{18}L\,t=\underline{\frac{1}{18}L\left(4+9x^2\right)=I_1}$$

$$I_2=\int\frac{36}{4+9x^2}\cdot dx=\int\frac{36}{4\left(1+\frac{9}{4}x^2\right)}\cdot dx=9\int\frac{1}{1+\frac{9}{4}x^2}\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \frac{9}{4}x^2=t^2 \rightarrow t=\frac{3}{2}x \\ dx=\frac{2}{3}\cdot dt \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_2=9\int\frac{1}{1+t^2}\cdot\frac{2}{3}\cdot dt=6\int\frac{1}{1+t^2}\cdot dt=6\,arc\ tag\ t+C=\underline{6\,arc\ tag\ \left(\tfrac{3}{2}x\right)+C=I_2}$$

Sustituyendo los valores obtenidos de I_1 e I_2 en la expresión (*), queda:

$$\underline{\underline{F(x)=\frac{1}{18}L\left(4+9x^2\right)+6\,arc\ tag\ \left(\tfrac{3}{2}x\right)+C}}$$

****

2º-B) Calcula la integral definida: $I = \int_1^4 \frac{\sqrt{x} + e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \cdot dx$.

$$I = \int_1^4 \frac{\sqrt{x} + e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \cdot dx \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{c|l} \sqrt{x} = t & \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \rightarrow t = 2 \\ x = 1 \rightarrow t = 1 \end{cases} \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx = dt \;\;;;\;\; \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\, dt & \end{array} \right\} \;\Rightarrow\; \int_1^2 \left(t + e^t\right) \cdot 2\, dx =$$

$$= 2 \cdot \int_1^2 \left(t + e^t\right) \cdot dt = 2 \cdot \left[\frac{t^2}{2} + e^t\right]_1^2 = 2 \cdot \left[\left(\frac{2^2}{2} + e^2\right) - \left(\frac{1^2}{2} + e^1\right)\right] = 2 \cdot \left(2 + e^2 - \frac{1}{2} - e\right) =$$

$$= \underline{\underline{2e^2 - 2e + 3 = I}}$$

****

TERCER BLOQUE

3º-A) a) Sean A, B y X matrices cuadradas de tamaño n. Despeja X de la siguiente ecuación: $A \cdot X \cdot B = B^2$.

b) Calcula la matriz X siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

----

a)

Multiplicando la expresión dada por A^{-1} por la izquierda y B^{-1} por la derecha y teniendo en cuenta que $M \cdot M^{-1} = I$, resulta:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot B^2 \cdot B^{-1} \;;\; I \cdot X \cdot I = A^{-1} \cdot B^2 \cdot B^{-1} \Rightarrow \underline{\underline{X = A^{-1} \cdot B^2 \cdot B^{-1}}}$$

b)

Vamos a calcular las matrices inversas de A y B:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \underline{1 = |A|} \;;\; A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$Adj\,(A^T) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = \underline{-1 = |B|} \;;\; B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$Adj\,(B^T) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

Ahora obtenemos B^2:

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+2 & 0+0+0 & 2+0+2 \\ 0+0+3 & 0+1+0 & 0+3+3 \\ 1+0+1 & 0+0+0 & 2+0+1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = B^2}$$

Sustituyendo los valores obtenidos en la expresión $X = A^{-1} \cdot B^2 \cdot B$:

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3+3+2 & -0+1+0 & -4+6+3 \\ -3+3+0 & -0+1+0 & -4+6+0 \\ -3+0+0 & -0+0+0 & -4+0-0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2-3+5 & 0+1+0 & 4+3-5 \\ -0-3+2 & 0+1+0 & 0+3-2 \\ 3-0-4 & -0+0-0 & -6+0+4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = X}}$$

****

3º-B) a) Calcula, en función del parámetro $a \in R$, las soluciones de la siguiente ecuación: $\begin{vmatrix} x & x-1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & 1 \\ x & 0 & a & x \end{vmatrix} = 0$.

b) ¿Para qué valor de a la ecuación anterior tiene una única solución?

----

a)

Restando a la primera fila la segunda del determinante 4 x 4 y después desarrollando éste determinante por los menores adjuntos de la segunda columna resulta:

$$\begin{vmatrix} x & x-1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 0 & x & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x & 1 \\ x & 0 & a & x \end{vmatrix} = 0 \;;\; \begin{vmatrix} x & x-1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & x & 1 \\ 1 & x & 1 \\ x & a & x \end{vmatrix} = 0 \;;$$

$$[-2(x-1)+1-4x]+(2x^2+a+x^2-x^2-2a-x^2)=0 \;;\; -2x+2+1-4x+x^2-a=0 \;;$$

$$x^2-6x+(3-a)=0 \Rightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{36-4(3-a)}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{36-12+4a}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{24+4a}}{2}=$$

$$=\frac{6\pm\sqrt{4(a+6)}}{2}=\frac{6\pm 2\sqrt{a+6}}{2}=3\pm\sqrt{a+6} \Rightarrow \begin{cases} \underline{\underline{x_1=3+\sqrt{a+6}}} \\ \underline{\underline{x_2=3-\sqrt{a+6}}} \end{cases}.$$

b)

La solución es única cuando se cumpla que $\sqrt{a+6}=0 \Rightarrow \underline{\underline{a=-6}}$

****

CUARTO BLOQUE

4º-A) a) Estudia, en función del parámetro $k \in R$, la posición relativa de los planos: $\pi_1 \equiv x+y-z=1 \quad y \quad \pi_2 \equiv x+y-k^2z=k$.

b) ¿Existe algún valor de k para el que los planos $\pi_1 \;\; y \;\; \pi_2$ sean perpendiculares?

----

a)

El estudio puede hacerse por vectores normales o por un sistema de ecuaciones.

Por vectores normales: Los vectores normales son $\overrightarrow{n_1}=(1,\ 1,\ -1)$ y $\overrightarrow{n_2}=(1,\ 1,\ -k^2)$.

Para $k^2=1$ los vectores normales son linealmente dependientes (iguales), por lo tanto los planos son paralelos o coincidentes, dependiendo del término independiente, que sea distinto o igual, respectivamente. Para cualquier valor real de k tal que $k^2 \neq 1$, los planos son secantes.

Como las soluciones de la ecuación $k^2=1$ tiene las soluciones $k_1=1$ y $k_2=-1$, tenemos las siguientes situaciones:

$$\underline{\underline{Para\ \begin{Bmatrix} k \neq 1 \\ k \neq -1 \end{Bmatrix}\ los\ \ planos\ \ \pi_1 \equiv x+y-z=1 \quad y \quad \pi_2 \equiv x+y-k^2z=k \ \ son\ \ \sec antes.}}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ k=1\ \ los\ \ planos\ \ \pi_1 \equiv x+y-z=1 \quad y \quad \pi_2 \equiv x+y-k^2z=k \ \ son\ \ coincidentes.}}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ k=-1\ \ los\ \ planos\ \ \pi_1 \equiv x+y-z=1 \quad y \quad \pi_2 \equiv x+y-k^2z=k \ \ son\ \ paralelos.}}$$

Por sistema de ecuaciones. Los planos $\pi_1 \equiv x+y-z=1 \quad y \quad \pi_2 \equiv x+y-k^2z=k$ determinan el sistema $\begin{cases} \pi_1 \equiv x+y-z=1 \\ \pi_2 \equiv x+y-k^2z=k \end{cases}$ cuyas matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes: $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -k^2 \end{pmatrix} \ y \ M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -k^2 & k \end{pmatrix}$.

Según los rangos de M y M’ pueden presentarse los siguientes casos:

Rango M = Rango M’ = 2 $\rightarrow$ S. C. I. $\rightarrow$ Los planos se cortan en una recta.

Rango M = 1 ;; Rango M’ = 2 $\rightarrow$ S. I. $\rightarrow$ Los planos son paralelos.

Rango M = Rango M’ = 1 $\rightarrow$ S. C. I. $\rightarrow$ Los planos son coincidentes.

$$\underline{\underline{Para\ \ k=1 \Rightarrow\ Rango\ \ M=Rango\ \ M'=1 \Rightarrow (S.C.I.) \Rightarrow\ Los\ \ planos\ \ son\ \ coincidentes.}}$$

$$\underline{\underline{Para \;\; k=-1 \;\Rightarrow\; Rango \;\; M=1 \;;;\; Rango \;\; M'=2 \;\Rightarrow\; (S.I.) \;\Rightarrow\; Los \;\; planos \;\; son \;\; paralelos.}}$$

$$\underline{\underline{Para \;\; \left\{\begin{matrix} k\neq 1 \\ k\neq -1 \end{matrix}\right\} \;\Rightarrow\; Rango \;\; M = Rango \;\; M'=2 \;\Rightarrow\; (S.C.I.) \;\Rightarrow\; Los \;\; planos \;\; son \;\; secantes.}}$$

b)

Para que los planos $\pi_1 \equiv x+y-z=1 \;\; y \;\; \pi_2 \equiv x+y-k^2z=k$ sean perpendiculares es necesario que sus vectores normales lo sean, es decir: que su producto escalar sea cero.

$$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0 \;\Rightarrow\; (1,\;1,\;-1)\cdot(1,\;1,\;-k^2) = 1+1+k^2 = 2+k^2 = 0 \;\Rightarrow\; \underline{k \notin R}$$

<u>No existe ningún valor real de k para que los planos sean perpendiculares.</u>

****

4º-B) a) Halla la ecuación general de un plano π que contenta a la recta $r \equiv \begin{cases} x+z=1 \\ y+z=0 \end{cases}$ y pase por el origen de coordenadas.

b) Halla las ecuaciones paramétricas de una recta r’ contenida en dicho plano, que sea perpendicular a r y que pase por el punto P(1, 0, 0).

----

a)

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x+z=1 \\ y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \underline{x=1-\lambda} \;;\; \underline{y=-\lambda} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x=1-\lambda \\ y=-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}.$$

Un vector director de r es $\overrightarrow{u}=(-1,\ -1,\ 1)$.

Un punto de r es P(1, 0, 0).

El vector $\overrightarrow{u}=(-1,\ -1,\ 1)$ es director del plano π por contener a r.

El plano π, por contener a los puntos O y P tiene como vector director al que determinan estos puntos: $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{OP}=(1,\ 0,\ 0)$.

Considerando el punto O y los vectores $\overrightarrow{u}=(-1,\ -1,\ 1)$ y $\overrightarrow{v}=(1,\ 0,\ 0)$ podemos obtener la ecuación general de π:

$$\pi\left(O;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \;;\; \begin{vmatrix} y & z \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \;;\; y+z=0$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv y+z=0}}$$

b)

En primer lugar es importante observar que la recta r contiene al punto P(1, 0, 0).

Los puntos del plano π tienen por expresión general $G(0,\ y,\ -y)$.

Un vector director de r’ es cualquiera que sea linealmente dependiente del vector $\overrightarrow{w'}=\overrightarrow{GP}=P-G=(1,\ -y,\ y)$, con tal de ser perpendicular al vector director de r: $\overrightarrow{u}=(-1,\ -1,\ 1)$.

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w'}=0 \Rightarrow (-1,\ -1,\ 1)\cdot(1,\ -y,\ y)=-1+y+y=0 \;;\; 2y=1 \;;\; y=\frac{1}{2} \Rightarrow \overrightarrow{w'}=\left(1,\ -\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2}\right).$$

Un vector director de r’ es $\overrightarrow{w} = (2,\ -1,\ 1)$ y la recta r’ dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$\underline{\underline{r' \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\mu \\ y = -\mu \\ z = \mu \end{cases}}}$$

****